時系列データの計測

教科書には記述がありません。

時系列の計測

- 温度、位置、速度など、物理量の時間変化
  ⇒ 時刻tと物理量の組み合わせで記録される
  $(0, \theta_0), \ldots, (t, \theta_t)$
- 時刻とともに順番に計測されるデータ
  ⇒ 現在時刻までの履歴データが使える
  ⇒ 得られているすべての計測値をつかって誤差を最小にする推定値を求めることができる

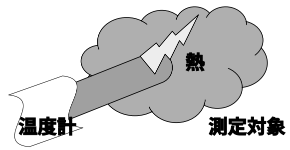
時系列データの推定

1）過去の計測データの補正(smoothing)
$(\theta_0, \ldots, \theta_t)$から$\theta_\tau$ $(0 <= \tau <= t)$ の最良推定値を求める

2）現在の計測データの補正(filtering)
$(\theta_0, \ldots, \theta_t)$から$\theta_t$ の最良推定値を求める

3）未来の計測データの予測(prediction)
$(\theta_0, \ldots, \theta_t)$から$\theta_\tau$ $(\tau > t)$ の最良推定値を求める

温度計の例



- 温度計の原理
  - □ 測りたい対象の持つ熱が温度計に伝わることで、温度計と対象がほぼ同じ温度になることを利用
  - □ しかし、熱が伝わるには時間がかかる

⇒ 時系列データをつかった最尤推定を用いると高速に測ることができる

- □ 温度上昇の時系列計測値を用いて、将来一定温度になったときの温度を予測する

熱伝導

- 熱が移動する速度は温度差に比例する

単位時間当りの熱流 → $q_t = k(\theta_\infty - \theta_t)$

測定対象温度 ↗ (θ_∞)　↖ 温度計の温度 (θ_t)

- 温度計の熱容量をc(J/K)とすると

$$c\,d\theta_t = q_t dt = k(\theta_\infty - \theta_t)dt$$

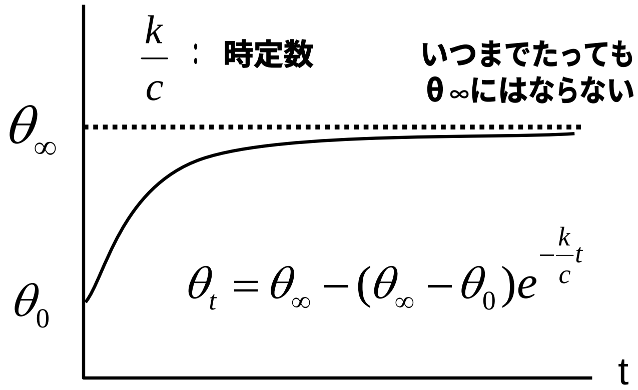
$$\therefore \frac{d\theta_t}{dt} = \frac{k}{c}(\theta_\infty - \theta_t)$$

この微分方程式をとくと

$$\theta_t = \theta_\infty - (\theta_\infty - \theta_0)e^{-\frac{k}{c}t}$$

温度計のt=0での初期温度

1次遅れ系の応答



オフライン推定とオンライン推定

- オフライン推定
  - □モデル当てはめ（例：直線当てはめ）
  - □すべての計測値がそろってから推定する
- オンライン推定
  - □時系列で計測値が得られるとき、新しい計測値が得られるたびに逐次的に推定値を更新する
  - □その時点での最良推定値がいつも得られるのでそのつどなんらかの判断をするのに役立つ

θ∞の逐次的推定

- ここでは簡単のため、θ_0,k,c, θ_tの計測誤差、σ_θが既知としよう　⇒本当は未知でも推定できる

$$\theta_t = \theta_\infty - (\theta_\infty - \theta_0)e^{-\frac{k}{c}t}$$

$$= \theta_\infty\left(1 - e^{-\frac{k}{c}t}\right) + \theta_0 e^{-\frac{k}{c}t}$$

$$\therefore \theta_\infty = \frac{\theta_t - \theta_0 e^{-\frac{k}{c}t}}{1 - e^{-\frac{k}{c}t}}$$

計測値 $(0,\theta_0),\cdots,(\tau,\theta_\tau),\cdots,(t,\theta_t)$

θ∞ $\left\{\tilde{\theta}_\infty^{(0)},\cdots,\tilde{\theta}_\infty^{(\tau)},\cdots,\tilde{\theta}_\infty^{(t)}\right\}$

θ∞の誤差 $\left\{\sigma^2_{\tilde{\theta}_\infty^{(0)}},\cdots,\sigma^2_{\tilde{\theta}_\infty^{(\tau)}},\cdots,\sigma^2_{\tilde{\theta}_\infty^{(t)}}\right\}$

θ∞の逐次的推定

$$\theta_\infty = \frac{\theta_t - \theta_0 e^{-\frac{k}{c}t}}{1-e^{-\frac{k}{c}t}}$$

計測値 $(0,\theta_0),\cdots,(\tau,\theta_\tau),\cdots,(t,\theta_t)$

θ∞ $\left\{\tilde{\theta}_\infty^{(0)},\cdots,\tilde{\theta}_\infty^{(\tau)},\cdots,\tilde{\theta}_\infty^{(t)}\right\}$

θ∞の誤差 $\left\{\sigma^2_{\tilde{\theta}_\infty^{(0)}},\cdots,\sigma^2_{\tilde{\theta}_\infty^{(\tau)}},\cdots,\sigma^2_{\tilde{\theta}_\infty^{(t)}}\right\}$

$$\frac{\partial\theta_\infty}{\partial\theta_t} = \frac{1}{1-e^{-\frac{k}{c}t}}$$ より $$\sigma^2_{\tilde{\theta}_\infty^{(t)}} = \left(\frac{\partial\theta_\infty}{\partial\theta_t}\right)^2\sigma_\theta^2 = \frac{\sigma_\theta^2}{\left(1-e^{-\frac{k}{c}t}\right)^2}$$

計測誤差の異なるt個の計測値から最尤推定値を求めるには？

θ∞の逐次的推定

$$\sigma^2_{\tilde{\theta}_\infty^{(t)}} = \frac{\sigma_\theta^2}{\left(1-e^{-\frac{k}{c}t}\right)^2}$$ を重みして加重平均をとると

最良推定値

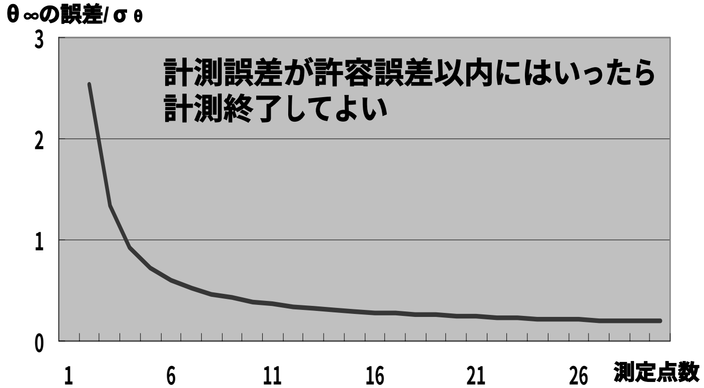
$$\hat{\theta}_\infty^{(0:t)} = \frac{\frac{1}{\sigma_\theta^2}\sum_{\tau=0}^{t}\left\{\left(1-e^{-\frac{k}{c}\tau}\right)^2\tilde{\theta}_\infty^{(\tau)}\right\}}{\frac{1}{\sigma_\theta^2}\sum_{\tau=0}^{t}\left(1-e^{-\frac{k}{c}\tau}\right)^2} = \frac{\sum_{\tau=0}^{t}\left\{\left(1-e^{-\frac{k}{c}\tau}\right)^2\left(\theta_\tau-\theta_0 e^{-\frac{k}{c}\tau}\right)\right\}}{\sum_{\tau=0}^{t}\left(1-e^{-\frac{k}{c}\tau}\right)^2}$$

$$\sigma^2_{\hat{\theta}_\infty^{(0:t)}} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{\tau=0}^{t}\left(1-e^{-\frac{k}{c}\tau}\right)^2} \overset{t>>1}{\approx} \frac{\sigma_\theta^2}{t}$$

最良推定値の推定分散

θ∞の計測誤差

測定点数が増えると急速に計測誤差が減少する



ここでチェック：

- 時刻tでの位置がx=2t+x0で与えられる運動物体がある。ただし、x0は未知であり、tの計測誤差は0、xの計測誤差は±1とする。このとき、以下の観測データから物体の初期位置x0を推定せよ。

(t,x) = (1.0, 3.0), (2.0, 6.0), (3.0, 6.0)

t=1での観測x=3から、 $\hat{x}_0^{(1)} = 3-2\times1 = \underline{1.0},\ \sigma^{2(1)}_{x_0} = \underline{1.0}$

t=2での観測x=6から、 $\hat{x}_0^{(2)} = 6-2\times2 = 2.0,\ \sigma^{2(2)}_{x_0} = 1.0$

両者を加重平均で統合すると、

$\hat{x}_0^{(1:2)} = (1\times1+1\times2)/(1+1) = \underline{1.5},\ \sigma^{2(1:2)}_{x_0} = \underline{0.5}$

t=3での観測x=6から、同様に $\hat{x}_0^{(3)} = 6-2\times3 = 0.0,\ \sigma^{2(3)}_{x_0} = 1.0$

$\hat{x}_0^{(1:3)} = (1.5/0.5+0.0/1.0)/(1/0.5+1) = \underline{1.0},\ \sigma^{2(1:3)}_{x_0} = \underline{0.3}$

現在の温度θtの推定

- 0〜t-1時刻までの計測値から計算されたθ∞の予測値をもちいて、t時刻の温度計の温度θtを予測　(⇒　フィルタリング)
- θ∞の予測と同じ原理（加重平均）で計算できる

$$\tilde{\theta}_t^{(0:t-1)} = \hat{\theta}_\infty^{(0:t-1)} - (\hat{\theta}_\infty^{(0:t-1)} - \theta_0)e^{-\frac{k}{c}t}$$

この計測誤差の分散は

$$\frac{\partial \tilde{\theta}_t^{(0:t-1)}}{\partial \hat{\theta}_\infty^{(0:t-1)}} = (1-e^{-\frac{k}{c}t})$$ より $$\sigma^2_{\tilde{\theta}_t^{(0:t-1)}} = \sigma^2_{\hat{\theta}_\infty^{(0:t-1)}}(1-e^{-\frac{k}{c}t})^2$$

（誤差伝播則より）

現在の温度θtの推定

t-1時刻までの計測値からの予測とその分散　$\tilde{\theta}_t^{(0:t-1)}$　$\sigma^2_{\tilde{\theta}_t^{(0:t-1)}} = \sigma^2_{\hat{\theta}_\infty^{(0:t-1)}}(1-e^{-\frac{k}{c}t})^2$

t時刻における計測値とその分散　θ_t　σ_θ^2

t時刻における温度の最良推定値は？　⇒加重平均

$$\hat{\theta}_t^{(0:t)} = \frac{(1-e^{-\frac{k}{c}t})\left\{\theta_t + \tilde{\theta}_t^{(0:t-1)}\sum_{\tau=0}^{t-1}(1-e^{-\frac{k}{c}\tau})^2\right\}}{\sum_{\tau=0}^{t}(1-e^{-\frac{k}{c}\tau})^2}, \quad \sigma^2_{\hat{\theta}_t^{(0:t)}} = \frac{\sigma_\theta^2}{\sum_{\tau=0}^{t}(1-e^{-\frac{k}{c}\tau})^2}$$

時系列の計測

- 温度、位置、速度など、物理量の時間変化
  ⇒　時刻tと物理量の組み合わせで記録される

  (0, θ0),….,(t, θt)

- 時刻とともに順番に計測されるデータ
  ⇒　現在時刻までの履歴データが使える
  ⇒　得られているすべての計測値をつかって誤差を最小にする推定値を求めることができる

逐次法によるオンライン推定

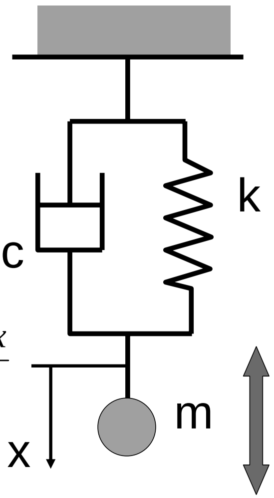
- 加重平均の考えと使うと、過去すべての計測値を記録していなくても現時刻の最良推定値を計算できる

  ⇒　直前の時刻の推定値から、モデル（温度計の場合はフーリエの法則）から現時刻の値とその分散を予測し、実際の観測と計測誤差分散を加重平均により統合して、現時刻の値を推定する

  ⇒自動的に、過去すべての計測値を適切に考慮したことになる

ばねばかりの例

- ばね定数 k （既知）
  変位に比例した力
- ダンパー定数 c （既知）
  速度に比例した力
- 重さ m （未知）
  加速度に比例した力



力のつりあい式 $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg$$

2階常微分方程式 （2次遅れ系）

$\ddot{x} + a\dot{x} + b = c$ の解は

$s^2 + as + b = 0$ の解をα、βとすると

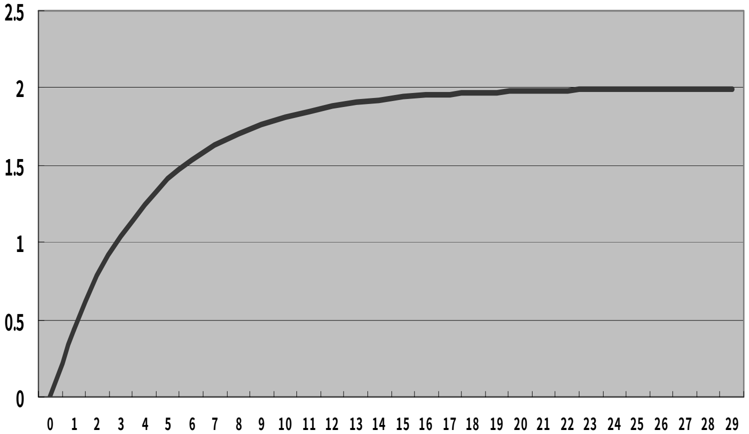
二実数解の場合 $x(t) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 e^{-\beta t} + c$

重解の場合 $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t} + c$

二虚数解の場合 $\alpha = \lambda + \omega i, \beta = \lambda - \omega i$

$$x(t) = e^{-\lambda t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + c$$

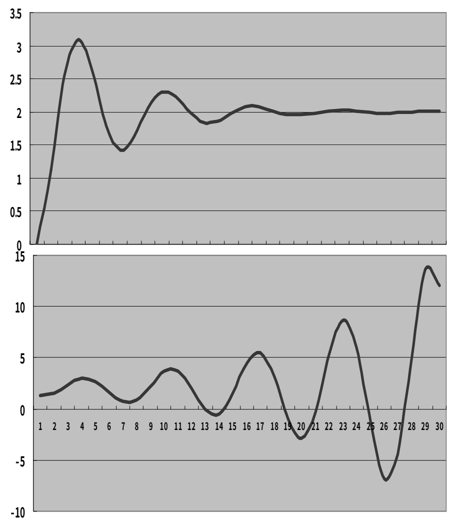
2実数解の場合



2虚数解の場合

減衰振動

発散（発振）



ばねばかりの例

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=mg$$

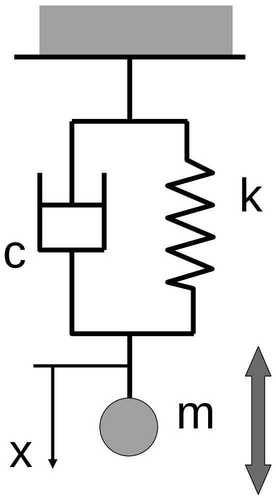
$$s=-\frac{c}{2m}\pm\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}i$$

負なので減衰

$m>\frac{c^2}{4k}$ のとき

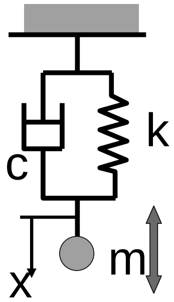
周期振動

角周波数 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}$



ばねばかりの例

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=mg$$



$$x(t)=\frac{mg}{k}-e^{-\frac{c}{2m}t}\left(\frac{mg}{k}\cos\omega t+\frac{cg}{2k\omega}\sin\omega t\right)$$

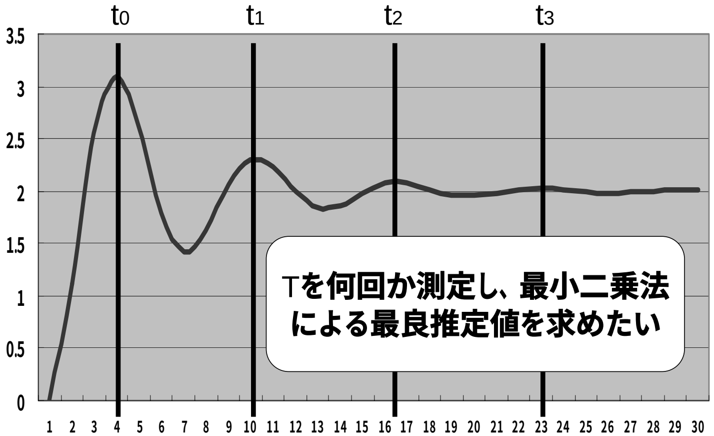
t⇒∞で $x=\frac{mg}{k}$ に近づく (つりあいの位置)

待てないときはどうするか？

振動周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi m}{\sqrt{4mk-c^2}}$ をはかる

周期Tの計測

$T_1=t_1-t_0$　$T_2=t_2-t_1$　$T_3=t_3-t_2$



相関のある計測値の統合

- 同一の対象を何度か測定した場合、誤差が独立ならば、平均もしくは加重平均で最良推定値が求まる
- しかし、$T_1,T_2,\ldots T_n$は相関をもつ！

$T_1=t_1-t_0$　　$t_0,t_1,t_2,\ldots\ldots$は独立

$T_2=t_2-t_1$　　となりあうTは同じ計測値tをつかって計算されるので、相関をもってしまう。

$T_3=t_3-t_2$

相関のある計測値の統合

- T_iとT_{i+1}の共分散を求めてみる

$$T_i = t_i - t_{i-1},\quad \sigma_{T_i}^2 = \left(\frac{\partial T_i}{\partial t_i}\right)^2 \sigma_t^2 + \left(\frac{\partial T_i}{\partial t_{i-1}}\right)^2 \sigma_t^2 = \underline{2\sigma_t^2}$$

Tの分散

$$\sigma_{T_i,T_{i+1}} = \frac{1}{N}\sum(\delta t_i - \delta t_{i-1})(\delta t_{i+1} - \delta t_i)$$

$$= \frac{1}{N}\sum(\delta t_i \delta t_{i+1} - \delta t_i{}^2 - \delta t_{i-1}\delta t_{i+1} + \delta t_{i-1}\delta t_i)$$

$$= -\frac{1}{N}\sum \delta t_i{}^2 = \underline{-\sigma_t^2}$$

T_i,T_{i+1}の共分散

共分散が負⇒T_iがへるとT_{i+1}が増える

相関のある計測値の統合

- 2つの計測値 $(x_1,\sigma_1),(x_2,\sigma_2),\sigma_{12}$

線形推定 $\hat{x} = Ax_1 + Bx_2 + C$

A,B,Cを決める ⇒ 不偏推定かつ最小分散推定になるように

$$\hat{x}^{(1)} = Ax_1{}^{(1)} + Bx_2{}^{(1)} + C \qquad \therefore \sum \hat{x}^{(i)} = A\sum x_1{}^{(i)} + B\sum x_2{}^{(i)} + C$$

$$\hat{x}^{(2)} = Ax_1{}^{(2)} + Bx_2{}^{(2)} + C \qquad (N \to \infty) \Rightarrow x = Ax + Bx + C$$

$$\vdots \qquad \therefore A + B = 1,\ C = 0$$

$$\hat{x}^{(N)} = Ax_1{}^{(N)} + Bx_2{}^{(N)} + C \qquad \hat{x} = Ax_1 + (1-A)x_2$$

相関のある計測値の統合

- 2つの計測値 $(x_1,\sigma_1),(x_2,\sigma_2),\sigma_{12}$

$$\sigma_{\hat{x}}{}^2 = \frac{1}{N}\sum(\hat{x}-x)^2 = \frac{1}{N}\sum(Ax_1 + (1-A)x_2 - x)^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum\left\{A(x_1 - x) + (1-A)(x_2 - x)\right\}^2$$

$\hat{x} = Ax_1 + (1-A)x_2$

$$= A^2\frac{1}{N}\sum(x_1 - x)^2 + (1-A)^2\frac{1}{N}\sum(x_2 - x)^2$$

$$+ 2A(1-A)\frac{1}{N}\sum(x_1 - x)(x_2 - x)$$

最小二乗法

(最小分散推定)

$$= A^2\sigma_1{}^2 + (1-A)^2\sigma_2{}^2 + 2A(1-A)\sigma_{12} \Rightarrow \min$$

$$\frac{\partial \sigma_{\hat{x}}{}^2}{\partial A} = 2A\sigma_1{}^2 - 2(1-A)\sigma_2{}^2 + 2(1-2A)\sigma_{12} = 0$$

相関のある計測値の統合

- 2つの相関を持つ計測値 $(x_1,\sigma_1),(x_2,\sigma_2),\sigma_{12}$ から最小二乗法による最尤推定値は, 以下の重みによる加重平均によってもとまる

$$w_1 = \frac{1}{\sigma_1{}^2} - \underline{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}},\quad w_2 = \frac{1}{\sigma_2{}^2} - \underline{\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2}}$$

$$\hat{x} = \frac{(\sigma_2{}^2 - \sigma_{12})x_1 + (\sigma_1{}^2 - \sigma_{12})x_2}{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2}{w_1 + w_2}$$

$$\sigma_{\hat{x}}{}^2 = \frac{1-r^2}{w_1 + w_2} = \frac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2 - \sigma_{12}{}^2}{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12}} \qquad \left(r = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}\right)$$ ←相関

周期Tの計測値の統合

測定値の分散と共分散 $(T_1, 2\sigma_T{}^2),\quad (T_2, 2\sigma_T{}^2),\quad \sigma_{T_1,T_2} = -\sigma_T{}^2$

$$\hat{T}^{(1:2)} = \frac{(2\sigma_T{}^2 + \sigma_T{}^2)T_1 + (2\sigma_T{}^2 + \sigma_T{}^2)T_2}{2\sigma_T{}^2 + 2\sigma_T{}^2 + 2\sigma_T{}^2} = \underline{\frac{T_1 + T_2}{2}},\quad \sigma_{\hat{T}^{(1:2)}}{}^2 = \frac{2\sigma_T{}^2 \cdot 2\sigma_T{}^2 - \sigma_T{}^4}{2\sigma_T{}^2 + 2\sigma_T{}^2 + 2\sigma_T{}^2} = \underline{\frac{\sigma_T{}^2}{2}}$$

$$\sigma_{\hat{T}^{(1:2)},T_3} = \frac{1}{N}\sum \frac{\delta T_1 + \delta T_2}{2} \cdot \delta T_3 = \frac{1}{2N}\sum \delta T_2 \delta T_3 = -\frac{\sigma_T{}^2}{2}$$

$$\hat{T}^{(1:3)} = \frac{(2\sigma_T{}^2 + \frac{\sigma_T{}^2}{2})\hat{T}^{(1:2)} + (\frac{\sigma_T{}^2}{2} + \frac{\sigma_T{}^2}{2})T_3}{\frac{\sigma_T{}^2}{2} + \frac{\sigma_T{}^2}{2} + \sigma_T{}^2} = \frac{\frac{5}{2}\hat{T}^{(1:2)} + T_3}{\frac{7}{2}} = \underline{\frac{5\hat{T}^{(1:2)} + 2T_3}{7}}$$

$$\sigma_{\hat{T}^{(1:3)}}{}^2 = \frac{\frac{\sigma_T{}^2}{2} \cdot 2\sigma_T{}^2 - \left(\frac{\sigma_T{}^2}{2}\right)^2}{\frac{\sigma_T{}^2}{2} + 2\sigma_T{}^2 + \sigma_T{}^2} = \frac{\frac{3}{4}\sigma_T{}^2}{\frac{7}{2}} = \underline{\frac{3}{14}\sigma_T{}^2}$$

計測値がふえるごとに推定分散が減少する

チェック：相関を考慮した推定

- **同一量を計測した2つの計測値から真の値を推定したい。2つの計測誤差には相関がある場合、相関を無視する（独立と仮定する）と推定値および推定誤差は正しい値に比べてどのようになるか？**

$$x_1 = 1.0,\quad \sigma_1^2 = 2.0,\quad x_2 = 2.0,\quad \sigma_2^2 = 1.0,\quad \sigma_{12} = -0.5$$

相関考慮

$$\hat{x} = \frac{(\sigma_2{}^2 - \sigma_{12})x_1 + (\sigma_1{}^2 - \sigma_{12})x_2}{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{(1+0.5)\times 1 + (2+0.5)\times 2}{1+2+2\times 0.5} = \underline{1.4}$$

$$\sigma_{\hat{x}}{}^2 = \frac{\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2 - \sigma_{12}{}^2}{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 - 2\sigma_{12}} = \frac{1\times 2 - 0.5^2}{1+2+2\times 0.5} = \underline{0.4}$$

独立仮定

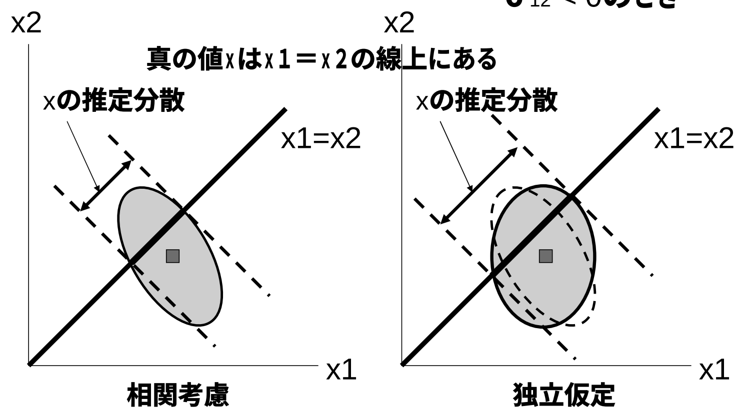
$$\hat{x} = \frac{x_1/\sigma_1{}^2 + x_2/\sigma_2{}^2}{1/\sigma_1{}^2 + 1/\sigma_2{}^2} = \frac{1/2\times 1 + 1/1\times 2}{1/2 + 1/1} = \underline{1.7}$$

$$\sigma_{\hat{x}}{}^2 = \frac{1}{1/\sigma_1{}^2 + 1/\sigma_2{}^2} = \frac{1}{1/2 + 1/1} = \underline{0.7}$$

過大評価

相関を無視するとなぜ過大評価となるのか

σ12 < 0**のとき**



過小評価になることもある！！

σ12 < 0**のとき**